Segundo Parcial **Cálculo Numérico** **10 de febrero de 2010**

* La nota del examen será la media aritmética de las obtenidas en los problemas planteados.
* La fecha estimada de publicación de las notas es el 24 de Febrero.
* La fecha estimada para la revisión del examen es el 3 de Marzo.Los alumnos que deseen que su examen sea revisado, deberán solicitarlo por escrito los días 25 y 26 de Febrero, de 9:00 a 14:00, en el despacho D-5210.

1^er^ Problema: Sea $x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + c$, con $x^{(0)}$ perteneciente a $\mathbb{R}^3$, la iteración resultante de aplicar el método de Jacobi a la resolución del sistema $Ax = b$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

y a, b pertenecientes a $\mathbb{R}$.

Se pide:

i) Determinar los valores de a para los cuales el método converge.

ii) Consideremos la cota

$$\|x - x^{(n)}\|_\infty \leq \frac{\|B\|_\infty^n}{1 - \|B\|_\infty} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty$$

y los vectores

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Calcular el rango de los valores de a positivos para los cuales se verifica la relación

$$\|x - x^{(n)}\|_\infty \leq (1/2)^{n+1} \text{ para } n \geq 1 .$$

2^o^ Problema: Se consideran fórmulas de integración del tipo

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \alpha\,[f(x_0) + f(x_1)] \tag{1}$$

i) Probar que, independientemente de los valores de α, x_0, x_1, siempre puede encontrarse un polinomio de cuarto grado para el cual la fórmula (1) no sea exacta.

ii) Determinar los valores de α, x_0, x_1 que hacen que (1) sea una fórmula exacta para polinomios de primer grado.

3^er^ Problema: Considérese la siguiente expresión general de los métodos de Runge-Kutta de segundo orden o de dos evaluaciones (RKm_2):

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h \displaystyle\sum_{i=1}^{2} w_i k_i \,, \\ \\ k_i = f\left(x_n + \alpha_i h \,,\, y_n + h \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j \right) \,,\ \alpha_1 = 0 \,. \end{cases}$$

Obtener la fórmula del método de orden 2 ($m = 2$) con $w_1 = w_2$.

Calculo Numérico 2° Parcial, Febrero 2010

Primer problema

Sea $x^{n+1}=Bx^n+c$, con x^0 perteneciente a R^3 la iteración resultante de aplicar el método de Jacobi a la resolución del sistema $Ax=b$ con:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

y a, b pertenecientes a R

Se pide:

a) Determinar el rango de valores de a para los cuales el método converge.

b) Consideremos la cota:

$$\|x-x^n\|_\infty \le \frac{\|B\|^n_\infty}{1-\|B\|_\infty}\|x^1-x^0\|_\infty .$$

y los vectores

$$b=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x^0=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calcular el rango de los valores de a positivos para los cuales se verifica la relación:

$$\|x-x^n\|_\infty \le (1/2)^{n+1} \quad \text{para } n\ge 1$$

Solución:

a) a converge si

$$|B_J-\lambda I|=0 \Rightarrow |-D^{-1}(L+U)-\lambda I|=0 \Rightarrow |D^{-1}(L+U)+\lambda I| \Rightarrow |L+U+\lambda D|=0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & a & 0 \\ 0 & \lambda & a \\ 0 & a & \lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda^3-\lambda a^2=o \Rightarrow \lambda=\pm a$$

Para que converja $\beta(B_J)<1 \Rightarrow |a|<1 \quad a\in(-1,1)$

b) $\|x-x^n\|_\infty \le \frac{\|B\|_\infty^n}{1-\|B\|_\infty}\|x^1-x^0\|_\infty \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

como $a>0 \Rightarrow a\in(0,1)$

$\|B_J\|_\infty = \max``\{0,|2a|,|a|\} = 2a$ con $B_J = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix}$

$$x^1 = Bx^0 + D^{-1}b = B\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + b = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

luego

$$\|x^1-x^0\|_\infty = \left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\|_\infty = \max\{|1|,|1|,|1|\} = 1$$

Sustituyendo

$$\frac{|2a|^n}{1-2|a|} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \forall n>1$$

$$\frac{|a|^n}{1-2|a|} \le \frac{1}{2^{2n+1}}$$

Tomando logaritmos a la expresión obtenemos

$$\{\log(4|a|)^n \le \log\left(\frac{1-2|a|}{2}\right) \quad \to Si \quad n=1 \quad 4|a| \le \frac{1-2|a|}{2} \Rightarrow |a| \le \frac{1}{10}$$

$n \ge 1$

luego el intervalo de valores de a para que se cumpla la cota dada es:

$a \in (0, \frac{1}{10})$

2º PARCIAL, FEBRERO 2010 – 2º PROBLEMA

SOLUCIÓN:

ESTUDIAMOS EL GRADO DE EXACTITUD DE LA FÓRMULA PARA LOS POLINOMIOS $1, x, x^2$:

1º) PARA QUE SEA EXACTA EN $f(x)=1$,

$$\int_0^1 dx = 2\alpha,$$

ES DECIR, $\alpha = \frac{1}{2}$

2º) PARA QUE SEA EXACTA EN $f(x)=x$,

$$\int_0^1 x\,dx = \alpha(x_0+x_1),$$

ES DECIR, $\alpha(x_0+x_1) = \frac{1}{2}$

3º) PARA QUE SEA EXACTA EN $f(x)=x^2$,

$$\int_0^1 x^2 dx = \alpha(x_0^2+x_1^2),$$

ES DECIR, $\alpha(x_0^2+x_1^2) = \frac{1}{3}$.

POR TANTO:

i) SI LA FÓRMULA FUESE EXACTA PARA POLINOMIOS DE CUANTO GRADO, LO SERÍA PARA $1, x, x^2$, POR LO QUE TENDRÍAMOS:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{2} \\ \alpha(x_0+x_1) = \frac{1}{2} \\ \alpha(x_0^2+x_1^2) = \frac{1}{3} \end{array}\right\}$$

LA SOLUCIÓN DE ESTE SISTEMA ES

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad x_0 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \quad x_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}.$$

POR ELLO, PODEMOS DESCARTAR LOS VALORES DE α, x_0, x_1 DISTINTOS DE LOS ANTERIORES SI QUEREMOS EXACTITUD PARA POLINOMIOS DE CUARTO GRADO. ADEMÁS, PARA ESTOS VALORES VIMOS QUE TAMPOCO HAY EXACTITUD, POR EJEMPLO, EN EL POLINOMIO $f(x) = x^4$, YA QUE:

$$\int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5},$$

$$\alpha(x_0^4 + x_1^4) = \frac{1}{2}\left(\frac{7-4\sqrt{3}}{36} + \frac{7+4\sqrt{3}}{36}\right) = \frac{7}{36} \neq \frac{1}{5}$$

(ii) LOS VALORES QUE HACEN LA FÓRMULA EXACTA PARA POLINOMIOS DE PRIMER GRADO, SEGÚN LO VISTO, SON AQUELLOS PARA LOS CUALES:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{2} \\ \alpha(x_0 + x_1) = \frac{1}{2} \end{array}\right\}$$

ES DECIR, $\alpha = \frac{1}{2}$, $x_1 = 1 - x_0$, x_0 ARBITRARIO.

Considerese la expresión general de los métodos de Runge-Kutta de segundo orden o de dos evaluaciones (Rkm_2)

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{2} w_i k_i$$

$$k_i = f\left(x_n + \alpha_i h,\ y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j \right) \alpha_1 = 0$$

1) Obtener la fórmula del método de orden 2 ($m = 2$) con $w_1 = w_2$.

2) Dar la interpretación geométrica del método obtenido anteriormente.

SOLUCION

1) En este caso

$$y_{n+1} = y_n + h(w_1 k_1 + w_2 k_2)$$

con

$$k_1 = f(x_n , y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \alpha_2 h, y_n + h \beta_{21} f(x_n , y_n))$$

luego

$$y_{n+1} = y_n + h \left[w_1 f(x_n , y_n) + w_2 f(x_n + \alpha_2 h, y_n + h \beta_{21} f(x_n , y_n))\right]$$

teniendo en cuenta por otro lado que:

$$f(x+u,y+v) = f(x,y) + uf_x(x,y) + vf_y(x,y) + (1/2) [u^2 f_{xx}(x,y) + $$
$$+ 2uvf_{xy}(x,y) + v^2 f_{yy}(x,y)] + 0 [(|u| + |v|)^3]$$

puede ponerse

$$f(x_n + \alpha_2 h, y_n + h\,\beta_{21}\, f(x_n, y_n)) \quad = \quad f(x_n, y_n) + \alpha_2 h \ f_x(x_n, y_n) +$$

$$+ \quad h\,\beta_{21}\, f(x_n, y_n)\, f_y(x_n, y_n) \quad + \quad (1/2)\,(\alpha_2 h)^2\, f_{xx}(x_n, y_n) \quad +$$

$$+ (\alpha_2 h)\ (h\,\beta_{21}\, f(x_n, y_n))\ f_{xy}(x_n, y_n)\ + (1/2\ )(h\,\beta_{21}\, f(x_n, y_n))^2\, f_{yy}(x_n, y_n) +$$

$$+ 0\,[\ \ ].$$

Teniendo en cuenta asímismo el método de Taylor

$$y_{n+1} = y_n + h\, y_n' + \frac{h^2}{2}\, y_n'' + 0(h^3) =$$

$$= y_n + h\, f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\, [f_x(x_n, y_n) + f_y\,(x_n, y_n)\, f(x_n, y_n)] + 0\,(h^3)$$

Identificando coeficientes en potencias de h resulta:

$$h^0: \quad y_n = y_n$$

$$h^1: \quad w_1\, f\,(x_n, y_n) + w_2\, f\,(x_n, y_n) = f\,(x_n, y_n)$$

$$h^2: \quad w_2\, \alpha_2\, f_x\,(x_n, y_n) + w_2\, \beta_{21}\, f\,(x_n, y_n)\ fy\,(x_n, y_n) =$$

$$= \frac{1}{2}\, [\ f_x\,(x_n, y_n) + fy\,(x_n, y_n)\, f\,(x_n, y_n)\ ]$$

Debe tenerse

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1 \\ w_2\ \alpha_2 = 1 \\ w_2\ \beta_{21} = 1/2 \end{cases}$$

Como nos indican que $w_1 = w_2$, las soluciones del sistema anterior son:

$$w_1 = w_2 = 1/2 \quad , \quad \alpha_2 = \beta_{21} = 1$$

lo que nos lleva al siguiente algoritmo.

$$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + h, y_n + h\, k_1) \\ y_{n+1} = y_n + (h/2)\ [k_1 + k_2] \end{cases}$$

o sea

$$y_{n+1} = y_n + (h/2)\ [\, f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + h\ f(x_n, y_n))]$$

Este algoritmo Runge-Kutta de orden 2 se denomina método de Euler-Cauchy modificado o método de Heun.